ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 2 2014
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.968

Г. А. РАСОЛЬКО

К РЕШЕНИЮ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С ЯДРОМ КОШИ И СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 04.04.2014)

Предлагается алгоритм численного решения сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши и специальной правой частью вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt=\ln\frac{1-x}{1+x}f(x),\quad -1<x<1, \tag{1}$$

в классах $h(-1)$ и $h(1)$, основанный на разложении сингулярного интеграла по многочленам Чебышева. Здесь $f(x)$ – заданная на $[-1,1]$ функция, непрерывная по Гельдеру; $\varphi(x)$ – искомая функция.

Класс $h(-1)$ по Мусхелишвили означает ограниченность решения в окрестности точки $x=-1$ и интегрируемую особенность в окрестности точки $x=1$. Класс $h(1)$ по Мусхелишвили означает ограниченность решения в окрестности точки $x=1$ и интегрируемую особенность в окрестности точки $x=-1$.

Аппарат сингулярных интегральных уравнений (СИУ) применяется при исследовании большого класса граничных задач теории упругости, аэродинамики и в других проблемах естествознания [1–3]. Эффективность численных методов для решения подобных задач во многом зависит от способа дискретизации задачи. Среди известных подходов следует отметить методы, основанные на полиномиальной аппроксимации искомого решения, в том числе метод ортогональных многочленов [2–5].

Метод ортогональных многочленов базируется на замечательном свойстве классических ортогональных многочленов Чебышева первого и второго рода для сингулярных интегралов:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-x}=U_{n-1}(x),\quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\frac{U_{n-1}(t)dt}{t-x}=-T_n(x),\quad |x|<1,\quad n\geq 1,$$

где $T_n(x), U_{n-1}(x)$ – многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно.

Эти «спектральные соотношения» для сингулярных интегралов позволили в дальнейшем построить хорошо известные методы решения простейшего сингулярного интегрального уравнения (1), основанные на обращении сингулярного интеграла в различных классах функций [2–5].

В работе [6] получены «квазиспектральные соотношения» для сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью, в частности, следующие.

Т е о р е м а 1. *Для $x\in(-1,1)$ и $k\geq 0$ справедливы равенства*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ln\frac{1-t}{1+t}\frac{T_k(t)dt}{t-x}=-\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}T_k(x)-8\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]}{}^{0}\sum_{m=0}^{j}\frac{1}{2m+1}T_{k-2-2j}(x), \tag{2}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ln\frac{1-t}{1+t}\frac{U_k(t)dt}{t-x}=-\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}U_k(x)-16\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]}{}^{0}\sum_{l=0}^{j}\frac{j+1-l}{2l+1}T_{k-2-2j}(x), \qquad (3)$$

где

$$\sum_{j=0}^{m}{}^{0}\rho_j T_{m-j}\equiv\rho_0 T_m+\rho_1 T_{m-1}+\cdots+\rho_{m-1}T_1+\frac{1}{2}\rho_m T_0.$$

В данной работе на основании (2), (3) получены в дополнение к работе [7] разложения сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью по многочленам Чебышева первого рода и построены вычислительные схемы приближенного решения уравнения (1) в классах $h(1)$ и $h(-1)$.

Т е о р е м а 2. *Для* $x\in(-1,1)$ *и* $k\ge 0$ *справедливы равенства*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\frac{1-t}{1+t}T_k(t)\frac{dt}{t-x}=-\pi\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}T_k(x)+\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]}{}^{0}\alpha_j T_{k-2-2j}(x)+$$
$$+\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}{}^{0}\beta_j T_{k-1-2j}(x),\quad \alpha_j=\sum_{m=0}^{j}\frac{-8}{2m+1},\quad \beta_j=\alpha_j+\frac{4}{2j+1},\quad j\ge 0; \qquad (4)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\frac{1-t}{1+t}U_k(t)\frac{dt}{t-x}=-\pi\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}U_k(x)+\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]}{}^{0}\delta_j T_{k-2-2j}(x)+$$
$$+\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}{}^{0}\gamma_j T_{k-1-2j}(x),\ \delta_j=\sum_{m=0}^{j}\frac{-16(j+1-m)}{2m+1}, \qquad (5)$$
$$\gamma_0=-8,\ \gamma_j=\frac{\delta_{j-1}+\delta_j}{2},\ j\ge 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выполним под интегралом в левой части (4) преобразование веса: $\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}=\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1+T_1(t)}{\sqrt{1-t^2}}$. Далее применим равенство $2T_k(t)T_1(t)=T_{k+1}(t)+T_{k-1}(t)$. Затем используем разложение (2). После элементарных преобразований получим равенство (4).

Доказательство равенства (5) проводится аналогично с учетом разложения (3).

Т е о р е м а 3. *Для* $x\in(-1,1)$ *и* $k\ge 0$ *справедливы равенства*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\ln\frac{1-t}{1+t}T_k(t)\frac{dt}{t-x}=-\pi\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}T_k(x)+\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]}{}^{0}\alpha_j T_{k-2-2j}(x)-$$
$$-\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}{}^{0}\beta_j T_{k-1-2j}(x),\quad \alpha_j=\sum_{m=0}^{j}\frac{-8}{2m+1},\quad \beta_j=\alpha_j+\frac{4}{2j+1},\quad j\ge 0; \qquad (6)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\ln\frac{1-t}{1+t}U_k(t)\frac{dt}{t-x}=-\pi\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}U_k(x)+\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]}{}^{0}\delta_j T_{k-2-2j}(x)-$$
$$-\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}{}^{0}\gamma_j T_{k-1-2j}(x),\ \delta_j=\sum_{m=0}^{j}\frac{-16(j+1-m)}{2m+1}, \qquad (7)$$
$$\gamma_0=-8,\ \gamma_j=\frac{\delta_{j-1}+\delta_j}{2},\ j\ge 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выполним под интегралом в левой части (6) преобразование веса: $\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}=\frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1-T_1(t)}{\sqrt{1-t^2}}$. Далее применим равенство $2T_k(t)T_1(t)=T_{k+1}(t)+T_{k-1}(t)$. Затем используем разложение (2). После элементарных преобразований получим равенство (6).

Доказательство равенства (7) проводится аналогично с учетом разложения (3).

Применим полученные формулы (4)–(7) к построению приближенного решения уравнения (1).

Известно [8, 9], что искомое решение $\varphi(x)\in h(1)$ уравнения (1) определяется формулой

$$\varphi(x)=-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\frac{1-t}{1+t}f(t)\frac{dt}{t-x}\right),\quad -1<x<1. \tag{8}$$

Для приближенного решения уравнения (1) используем разложение функции $f(x)$ по полиномам Чебышева [10], в результате чего приходим к следующему уравнению:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_n(t)\frac{dt}{t-x}=\ln\frac{1-x}{1+x}f_n(x),\quad -1<x<1, \tag{9}$$

где

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f_k\,T_k(x),\quad f_0=\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}f(t_j),\ f_k=\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}f(t_j)T_k(t_j),\ k>0,$$
$$t_j=\cos\frac{2j-1}{2n+2}\pi,\ j=1,2,...,n+1. \tag{10}$$

Согласно (8), решение уравнения (9) в заданном классе дается формулой

$$\varphi_n(x)=-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\frac{1-t}{1+t}f_n(t)\frac{dt}{t-x}\right),\quad -1<x<1. \tag{11}$$

Используя (10) и учитывая (4), из (11) получаем схему I:

$$\varphi_n(x)=\pi f_n(x)-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\sum_{j=0}^{n-2}{}^0T_{n-2-j}(x)\sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\alpha_k f_{n-j+2k}+\sum_{j=0}^{n-1}{}^0T_{n-1-j}(x)\sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\beta_k f_{n-j+2k}\right),$$
$$\alpha_k=\sum_{m=0}^{k}\frac{-8}{2m+1},\quad \beta_k=\alpha_k+\frac{4}{2k+1},\quad k\ge 0. \tag{12}$$

Пусть далее [10]

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f_kU_k(x),\quad f_k=G_k-\varepsilon_k\,G_{k+2},\quad G_k=\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}f(t_j)T_k(t_j),$$
$$\varepsilon_k=\begin{cases}1,\ k=0,1,...,n-2,\\ 0,\ k=n-1,n,\end{cases}\qquad t_j=\cos\frac{2j-1}{2n+2}\pi,\ \ j=1,2,...,n+1. \tag{13}$$

Используя (13) и учитывая (5), из (11) имеем схему II:

$$\varphi_n(x)=\pi f_n(x)-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\sum_{j=0}^{n-2}{}^0T_{n-2-j}(x)\sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\delta_k f_{n-j+2k}+\sum_{j=0}^{n-1}{}^0T_{n-1-j}(x)\sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\gamma_k f_{n-j+2k}\right),$$
$$\delta_k=\sum_{m=0}^{k}\frac{-16(k+1-m)}{2m+1},\qquad \gamma_0=-8,\ \gamma_k=\frac{\delta_{k-1}+\delta_k}{2},\ k\ge 1. \tag{14}$$

Оценим порядок точности приближенного решения в классе функций W^rH^μ, $r\ge 0$, $0<\mu\le 1$, имеющих производные до порядка r включительно, причем r-я производная принадлежит классу

Гельдера $H(\mu): \left|f^{(r)}(x_1) - f^{(r)}(x_2)\right| \le K|x_1 - x_2|^{\mu}, \ \forall x_1, x_2 \in [-1, 1]$, где K и μ – константы, не зависящие от выбора точек $x_1, \ x_2$.

С учетом (8), (11) и оценки сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью [11], может быть доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть функция* $f(x)$, *являющаяся правой частью уравнения* (1), *принадлежит классу* $W^r H^{\mu}, \ r \ge 0, \ 0 < \mu \le 1$. *Пусть, далее,* $f(x)$ *аппроксимируется интерполяционным многочленом* (10) *или* (13) *по узлам Чебышева первого рода,* $\varphi(x), \ \varphi_n(x)$, *определяемые формулами* (8), (11), *означают соответственно точное и приближенное решения уравнений* (1), (9) *в классе* $h(1)$. *Тогда*

$$\sqrt{1+x}\left\|\varphi(x) - \varphi_n(x)\right\|_{\infty} \le M\frac{\ln^2(n)}{n^{r+\mu}}, \ x \in [-\delta, \delta] \subset (-1, 1).$$

Константа M не зависит от n.

В таблице даны результаты численного решения уравнения (1) в классе $h(1)$ по формулам (12), (14) ($\varphi_n^{(I,II)}(x)$) при $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$. В данном случае функция $\varphi(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{1-x^2}}{4}\right)$ будет решением.

n	20	25	30	35
$\max\limits_{\lvert x\rvert<1} \left\lvert\varphi(x) - \varphi_n^{(I,II)}(x)\right\rvert$	$1{,}7 \cdot 10^{-8}$	$1{,}6 \cdot 10^{-10}$	$2{,}0 \cdot 10^{-12}$	$2{,}3 \cdot 10^{-14}$

Следует отметить, что замена переменных $t \to -t, \ x \to -x$ переводит один из классов $h(-1), \ h(1)$ в другой. Поэтому, на основании решения уравнения (1) в классе $\varphi(x) \in h(1)$, для решения в классе $\varphi(x) \in h(-1)$ приведем сразу вычислительные схемы:

$$\varphi_n(x) = \pi f_n(x) - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\sum_{j=0}^{n-2} {}^0T_{n-2-j}(x)\sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} \alpha_k f_{n-j+2k} - \sum_{j=0}^{n-1} {}^0T_{n-1-j}(x)\sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} \beta_k f_{n-j+2k}\right),$$

$$\alpha_k = \sum_{m=0}^{k} \frac{-8}{2m+1}, \quad \beta_k = \alpha_k + \frac{4}{2k+1}, \quad k \ge 0;$$

$$\varphi_n(x) = \pi f_n(x) - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\sum_{j=0}^{n-2} {}^0T_{n-2-j}(x)\sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} \delta_k f_{n-j+2k} - \sum_{j=0}^{n-1} {}^0T_{n-1-j}(x)\sum_{k=0}^{\left[\frac{j}{2}\right]} \gamma_k f_{n-j+2k}\right),$$

$$\delta_k = \sum_{m=0}^{k} \frac{-16(k+1-m)}{2m+1}, \quad k \ge 0, \qquad \gamma_0 = -8, \ \gamma_k = \frac{\delta_{k-1} + \delta_k}{2}, \ k \ge 1.$$

Литература

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.

2. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев, 1976.

3. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М., 1982.

4. *Габдулхаев Б. Г.* Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. Численный анализ. Казань, 1994.

5. *Лифанов И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., 1995.

6. *Расолько Г. А.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 3. С. 27–31.

7. *Расолько Г. А.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 1. С. 25–31.

8. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.

9. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., 1977.

10. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М., 1983.
11. *Шешко М. А., Якименко Т. С.* // Изв. вузов. Математика. 1979. № 6. С. 82–84.

G. A. RASOLKO

TO THE SOLUTION OF THE FIRST-KIND SINGULAR INTEGRAL EQUATION WITH THE CAUCHY KERNEL AND A SPECIAL RIGHT-HAND SIDE BY THE METHOD OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS

Summary

An algorithm for solution of the first-kind singular integral equation

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt = \ln\frac{1-x}{1+x}f(x), \quad -1 < x < 1,$$

is suggested. Here f is the Hölder's continuous functions on [−1, 1]; $\varphi(x)$ is an unknown function. The algorithm is based on the decomposition of singular integral with respect to Chebyshev's polynomials in the classes $h(1)$ and $h(-1)$.